

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 MIAHS
Espaces euclidiens
Examen terminal, le 18 décembre 2024, 10h45–12h45
CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. La matrice A est réelle et symétrique. Elle est donc diagonalisable d'après le Théorème Spectrale. **(1 pt)**

b. Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned} \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X & -2 & -2 \\ -2 & X-1 & 0 \\ -2 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+4 & -2 & -2 \\ -2X & X-1 & 0 \\ -2 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} X & -2 & -2 \\ -2X & X-1 & 0 \\ 2X & 0 & X+1 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & X-1 & 0 \\ 2 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & X-5 & -4 \\ 0 & 4 & X+5 \end{vmatrix} = \\ &= X(X^2 - 25 + 16) = X(X^2 - 9) = X(X-3)(X+3). \quad \textbf{(2 pts)} \end{aligned}$$

c. Les valeurs propres de A sont donc $-3, 0, 3$. **(1 pt)**

d. On détermine des générateurs des espaces propres E_{-3}, E_0, E_3 :

Pour E_{-3} , résolvons

$$\begin{aligned} (-3I_3 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x & -2y & -2z & = 0 \\ -2x & -4y & & = 0 \\ -2x & & -2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x & -4y & & = 0 \\ -3x & -2y & -2z & = 0 \\ -2x & & -2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x & +2y & & = 0 \\ -3x & -2y & -2z & = 0 \\ -2x & & -2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & & = 0 \\ & 4y & -2z & = 0 \\ & 4y & -2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & & = 0 \\ & 4y & -2z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x & = -2y = -z \\ y & = \frac{1}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc

$$E_{-3} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right). \quad \textbf{(1 pt)}$$

Pour E_0 , résolvons

$$\begin{aligned} (0I_3 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} & -2y & -2z & = 0 \\ -2x & -y & & = 0 \\ -2x & & +z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x & -y & & = 0 \\ -2x & & +z & = 0 \\ -2y & -2z & & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} -2x & -y & & = 0 \\ & y & +z & = 0 \\ & -2y & -2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x & -y & & = 0 \\ & y & +z & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x & -y & & = 0 \\ & y & +z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} -2x & = y = -z \\ y & = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{1}{2}z \\ y & = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc

$$E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right). \quad \textbf{(1 pt)}$$

Pour E_3 , résolvons

$$\begin{aligned}
 (3I_3 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 3x - 2y - 2z = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 2y - 2z = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2z \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

On a donc

$$E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \quad (1 \text{ pt})$$

Soit P la matrice dont les colonnes sont les générateurs de ces espaces propres :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

D'après le cours, P est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

e. On calcule :

$${}^tPP = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3. \quad (1 \text{ pt})$$

Donc P n'est pas orthogonale, mais $\frac{1}{3}P$ l'est car

$${}^t(\frac{1}{3}P)(\frac{1}{3}P) = \frac{1}{3}{}^tP\frac{1}{3}P = \frac{1}{9}{}^tPP = \frac{1}{9}9I_3 = I_3,$$

et on a toujours

$$(\frac{1}{3}P)^{-1}A(\frac{1}{3}P) = 3P^{-1}A\frac{1}{3}P = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc, si on prend $\frac{1}{3}P$ au lieu de P , on a bien une matrice orthogonale qui diagonalise A . (1 pt)

Exercice 2. a. On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

b. On déroule l'algorithme de Gauss :

$$wx + wy + wz + xy + xz + 2yz =$$

$$wx + w(y + z) + x(y + z) + 2yz =$$

$$(w + y + z)(x + y + z) - (y + z)^2 + 2yz =$$

$$\frac{1}{4}(w + y + z + x + y + z)^2 - \frac{1}{4}(w + y + z - x - y - z)^2 - y^2 - z^2 =$$

$$(\frac{1}{2}(w + x + 2y + 2z))^2 - (\frac{1}{2}(w - x))^2 - y^2 - z^2 =$$

$$(\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}x + y + z)^2 - (\frac{1}{2}w - \frac{1}{2}x)^2 - y^2 - z^2. \quad (3 \text{ pts})$$

Si on pose donc

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on a

$$Q(w, x, y, z) = Q' \left(M \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right),$$

où Q' est la forme quadratique diagonale

$$Q'(w', x', y', z') = (w')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2$$

sur $\mathbb{R}^4$. **(1 pt)**

c. D'après le b, la matrice de la forme bilinéaire symétrique Q' est la matrice diagonale

$$A' = I_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La signature de Q est donc $(1, 3)$. **(1 pt)**

d. D'après le b, on a ${}^t M A' M = A$. Comme M est inversible, on pose $P = M^{-1}$, et on a ${}^t P A P = A'$, qui est bien diagonale avec coefficients diagonaux égaux à ± 1 **(1 pt)**. On détermine donc $P = M^{-1}$, par exemple en effectuant la méthode du pivot de Gauss-Jordan sur la matrice en blocs $(M|I_4)$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

La matrice P est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(2 pts)}$$

d. On calcule

$$\begin{aligned} {}^t P A P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A'. \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$